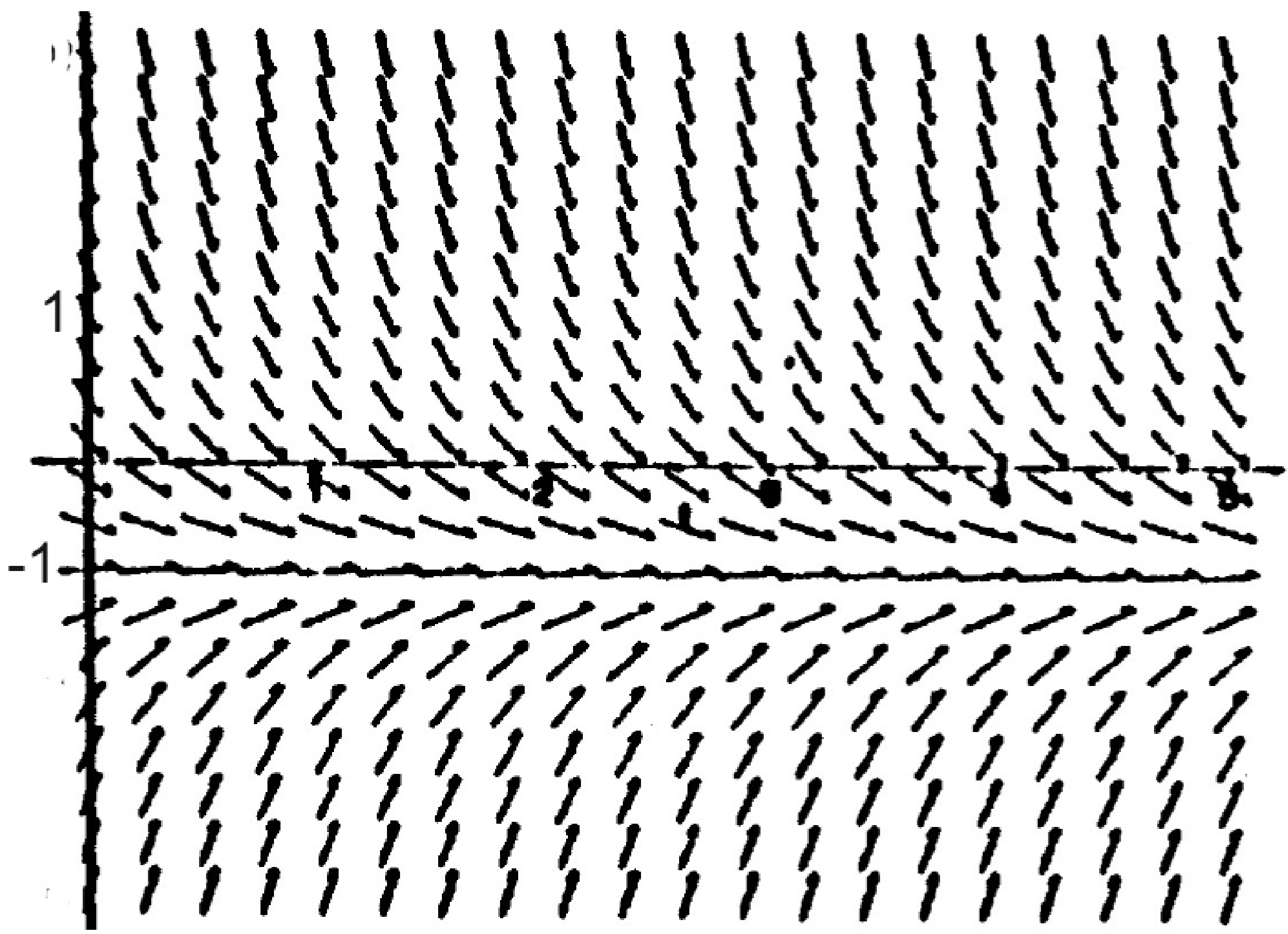
Geometrik olarak (4) denklemini herhangi bir (t, y) noktasında, çözümün $\frac{dy}{dt}$ eğiminin, $f(t, y)$ tarafından verildiğini söyler. Bunu o noktadan geçen $f(t, y)$ eğimine sahip kısa doğru parçaları çizerek gösterelim. Bütün bu doğru parçalarının ailesine (4) dif. denkleminin doğrultu alanı denir.

Örnek:
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1+y}{2}$$
dif denkleminin doğrultu alanı aşağıdaki şekildeki gibidir.



2. BİRİNCİ MERTEBEDEN DİF. DENKLEMLER

f, iki değişkenli verilen bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad (2.1)$$

şeklinde ifade edilen 1. mertebeden dif. denklemlerle ilgileneceğiz.

2.1 Lineer Dif. Denklemler

Eğer (2.1) denklemindeki f fonksiyonu bağımlı değişken y'ye göre lineer ise

bu durumda dif. denklem

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\,y = g(t)$$

formunda yazılabilir. Buna 1. mertebeden lineer dif. denklem denir. Şimdi $p(t)$, $g(t)$ fonksiyonlarının bir $\alpha < t < \beta$ aralığında sürekli olarak verildiğini düşünelim.

Örneğin $\frac{dy}{dt} - 3y = 2$ denklemini çözmeye çalışalım.

$$\frac{dy}{dt} = 3y + 2 = 3\left(y + \frac{2}{3}\right)$$

$y \neq -\frac{2}{3}$ ise

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y+\frac{2}{3}}=3 \quad \text{veya} \quad \frac{d}{dt}\ln\left|y+\frac{2}{3}\right|=3$$

buradan (her iki tarafın integrali alınırsa)

$$\ln\left|y+\frac{2}{3}\right|=3t+C$$

$$\left|y+\frac{2}{3}\right|=e^{3t+C}=e^{3t}\cdot e^{C}$$

$$y+\frac{2}{3}=\pm e^{C}e^{3t} \qquad c=\pm e^{C}$$

$$y=-\frac{2}{3}+ce^{3t}$$

$\left(0,\frac{4}{3}\right)$ noktasını içeren çözüm

$$\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}+c \Rightarrow c=2 \qquad y=-\frac{2}{3}+2e^{3t}$$

Daha genel olarak 1. mertebeden sabit katsayılı lineer dif. denklemlerin çözümüne bakalım.

$$\frac{dy}{dt}=ry+k \qquad r,k\in\mathbb{R} \text{ (Sabitler)} \quad (2.2)$$

$y\neq-\frac{k}{r}$ ise ve $r\neq0$ ise

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y+\frac{k}{r}}=r \Rightarrow \ln\left|y+\frac{k}{r}\right|=rt+C_1$$

$$y=-\frac{k}{r}+ce^{rt} \qquad c=\pm e^{C_1} \quad (2.3)$$

Eğer $r=0$ ise

$$y=kt+c$$

dir.

İntegral çarpanları: (2.2) dif. denklemini çözmek bize katsayıları sabit olmayan lineer dif denklerini çözmek için bir ipucu verir. (2.3) denklemini

$$ye^{-rt} = -\frac{k}{r}e^{-rt} + c \qquad (2.4)$$

şeklinde yazalım ve her iki tarafın t'ye göre türevini alalım;

$$(y' - ry)e^{-rt} = ke^{-rt} \qquad (2.5)$$

formunu elde ederiz. Bu bize (2.5)'in (2.2)'ye denk old. söyler. Buna göre (2.2) denklemini tekrar çözelim. (2.2)'de ry'yi eşitliğin soluna alıp

her iki tarafı e^{-rt} ile çarpalım. Bu bize (2.5)'i verir. (2.5)'in sol tarafı ye^{-rt}'nin türevidir. Buna göre

$$\left(ye^{-rt}\right)' = ke^{-rt} \qquad (2.6)$$

dır. Sonuçta (2.6)'nın her iki tarafının integrali alınırsa (2.4) elde ediler. Yani

$$y = -\frac{k}{r} + ce^{rt}$$

dir.

(2.2) denklemini çözmenin bir yolu da (2.2) denklemini e^{-rt} fonksiyonu ile çarpmaktır.

Bu çarpım denklemi hemen integre edilebilir forma getirdiği için e^{-rt} fonksiyonuna (2.2) denkleminin <u>integrasyon çarpanı</u> denir.

Şimdi amacımız

$$y' + p(t)\,y = g(t) \qquad (2.7)$$

dif. denklemini uygun integral çarpanı ile çarpıp denklemi integre edilebilir form haline dönüştürmek. Bu integral çarpanını bulmak için (2.7) denklemini daha bulmadığımız $\mu(t)$ fonksiyonu ile çarpmak olacaktır. Bu durumda

$$\mu(t)\,y' + \mu(t)\,p(t)\,y = \mu(t)\,g(t) \qquad (2.8)$$

(2.8) denkleminin sol tarafını bir fonksiyonun türevi olarak düzenlemek istiyoruz. (2.8)'in sol tarafının $\mu(t)\,y$'nin türevi olabilmesi için, $\mu(t)$'nin

$$\mu'(t) = \mu(t)\,p(t)$$

denklemini sağlaması gereklidir. Eğer $\mu(t)$'yi pozitif kabul edersek

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t) \qquad \text{veya} \quad \frac{d}{dt}\ln\mu(t) = p(t)$$

ve

$$\ln\mu(t) = \int p(t)\,dt + c$$

elde ederiz. c sabitini sıfır alarak $\mu(t)$'yi daha basit olarak

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt} \qquad (2.9)$$

olarak elde ederiz. ($\forall t$ için $\mu(t) > 0$)

Integral çarpanı $\mu(t)$'yi bulduktan sonra (2.7) denklemine tekrar döner ve $\mu(t)$ ile çarparsak

$$\left(\mu(t)y\right)' = \mu(t)\,g(t) \qquad (2.10)$$

elde ederiz. (2.10)'nun her iki tarafının integralini alırsak y,

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)\,dt + c$$

veya

$$y = \frac{\int \mu(t)\,g(t)\,dt + c}{\mu(t)} \qquad (2.11)$$

olarak bulunur.

y, (2.7)'nin herhangi bir çözümünü temsil ettiğinden (2.7)'nin her çözümünün (2.11)'in sağ tarafında içerildiği sonucuna varırız. Bu yüzden buna (2.7)'nin <u>genel çözümü</u> denir.

(2.11)'in geometrik yorumu c'ye bağlı olarak sonsuz eğri ailesidir. Bu eğrilere integral eğrileri denir. Bazen bu integral eğrilerinden birini almak önemlidir. Bu çözüm fonksiyonun grafiğinin geçmesi gereken (t_0, y_0) noktası belirlenerek yapılır. Bu genellikle

$$y(t_0)=y_0 \qquad (2.12)$$

yazılmak yapılır ve buna <u>başlangıç koşulu</u> denir. Başlangıç koşulu verilen 1. mertebeden dif. denkleme <u>başlangıç değer problemi</u> denir.

Örnek: 1) $y'+3y=e^{-2t}$ $\quad y(0)=2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$$p(t)=3 \quad g(t)=e^{-2t}$$

$$\mu(t)=e^{\int p(t)\,dt}=e^{\int 3\,dt}=e^{3t}$$

$$y=\frac{\int \mu(t)g(t)\,dt+c}{\mu(t)}=\frac{\int e^{3t}e^{-2t}\,dt+c}{e^{3t}}$$

$$y=\frac{e^{t}+c}{e^{3t}}=e^{-2t}+ce^{-3t}$$

$$t=0 \quad y=2 \qquad 2=1+c \Rightarrow c=1$$

$$y=e^{-2t}+e^{3t}$$

2) $y'+\frac{2}{t}y=\frac{\cos t}{t^2}$ $\quad y(\pi)=0\,,\ t>0$

başlangıç değer prob. çöz.

$$p(t)=\frac{2}{t} \quad g(t)=\frac{\cos t}{t^2}$$

$$\mu(t)=e^{\int p(t)\,dt}=e^{\int \frac{2}{t}\,dt}$$

$$=e^{2\ln t}=t^2$$

$$y = \frac{\int \mu(t) g(t)\, dt + c}{\mu(t)} = \frac{\int t^2 \cdot \frac{\cos t}{t^2} \cdot dt + c}{t^2}$$

$$= \frac{\sin t + c}{t^2}$$

$t = \pi \quad y = 0 \qquad 0 = \frac{0 + c}{\pi} \Rightarrow c = 0$

$$y = \frac{\sin t}{t^2}$$